統計流体力学と量子電気力学の相似点と相違点 (統計流体力学の研究)

桑原, 真二

数理解析研究所講究録
326巻 1978年 117-131

統計流体力学と量子電気力学の相似点と相違点

名大 工 応物　桑原 真二

§1. まえおき

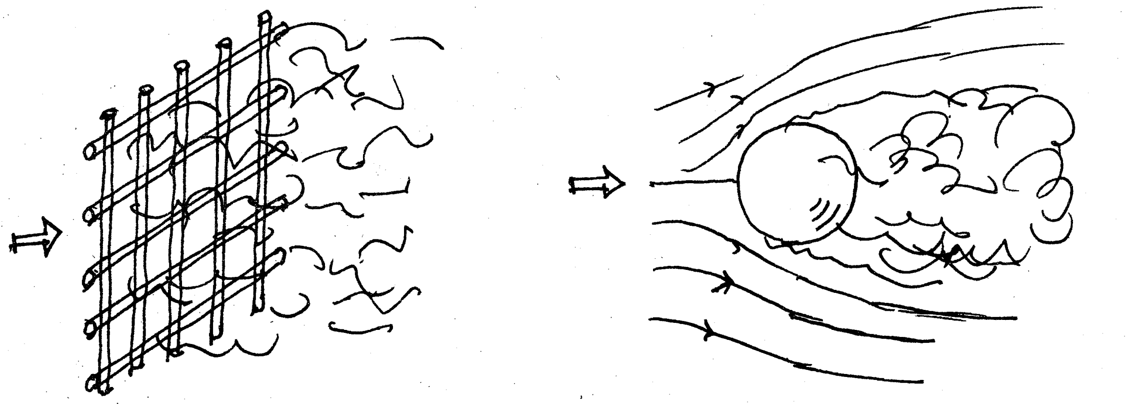
最近、乱流の統計理論において量子電気力学（QED）の手法、とくにくりこみの概念およびそれにともなう数学的手法が用いられるようになった。しかし、乱流および量子電気力学的現象の底にある物理的意味を適確に把握し、その間の数学的構造の相似点に着目して、使用するのでなくては、意味のない sophistication におちいらないとも限らない。この論文では、そのような観点に立ち、その一歩として、2,3 の相似点、相違点を指摘する。

まず両者の対象とする物理現象を示そう（第1, 2図）。統計流体力学（SHD）は平均流と乱れとの相互作用，QED は電子と光子との相互作用をとりあつかう。平均流，電子は性格の割合にはっきりした対象であり、乱れ、光子は甚だ波動的性格が強く、発生、消滅をくりかえしている。

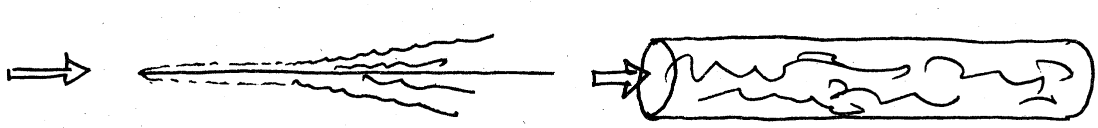
§2. SHD及びQEDの数学的構造

古典統計力学では力学変数を確率変数とみなし、確率空間（＝相空間, phase space）における力学変数の分布（分布密度関数）を対象とする。 力学変数はHamiltonの方程式によって記述され、物理的に意味のある観測量は、力学変数の関数である対応する量の統計的平均値としてあらわされる。

SHDでも数学的構造は古典統計力学と全く同じである。

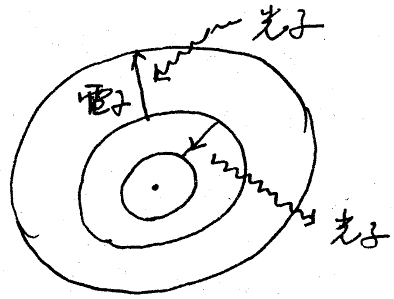


(a) 格子の後の乱流　(b) にぶい物体（球）の伴流

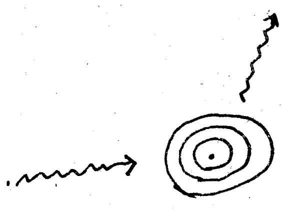


(c) 境界層乱流　(d) 内部乱流（Hagen-Poiseuilleの乱流）

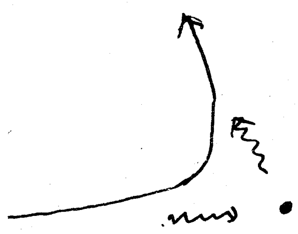
第1図　統計流体力学（乱流）の対象の典型的な例



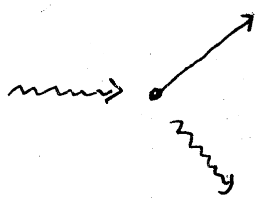
(a) 原子による光子の吸收，放出



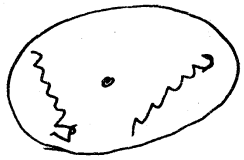
(b) 原子による光子の散乱



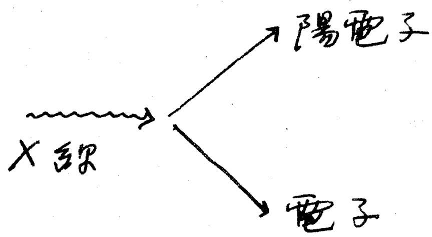
(c) Rutherford 散乱



(d) Compton 散乱



(e) スペクトル線の巾，
hyperfine structure



(f) pair creation

第2図 量子電気力学の対象とする現象

ただ異なるのは力学変数が離散自由度でなく連続自由度の速度場 $u(x)$ であり，それらを支配する基礎方程式が Navier-

Stokes 方程式である点である。力学変数が連続自由度であるために、相空間も、離散次元の空間でなく(ソレノイダル場, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ のはる関数空間となる。1つの力学系の時間的発展はその相空間の中の1点の運動と考えられ、その運動は N.-S. 方程式によって支配される。N.-S. 方程式を圧力を消去して速度だけで表わせば

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} = -v_m \frac{\partial v_l}{\partial x_m} + \nu \nabla^2 v_l + \iiint_V G \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{\partial}{\partial x_n'}\left(v_m' \frac{\partial v_n'}{\partial x_m'}\right)\right) d^3\boldsymbol{x}'$$
$$+ \iint_{\partial V}\left(\frac{\partial v_l'}{\partial t} + v_m' \frac{\partial v_l'}{\partial x_m'} - \nu \nabla'^2 \quad v_l'\right)\frac{\partial G}{\partial n'} dS \equiv Q_l(\boldsymbol{v}) \quad (2.1)$$

となる。ここで $v_l' = v_l(\boldsymbol{x}')$ 等であり, V は流れの場全体, ∂V はその境界である。この N.-S. 方程式では, 流れの場全体での速度分布, 境界での速度およびその時間微分がわかれば場全体のその後の速度の発展が定められるという形式をとっている。 G はラプラス演算子に対する Green 関数:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \quad \boldsymbol{x} \in V \\ G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0 \quad \boldsymbol{x}' \in \partial V \quad \boldsymbol{x}\,(\neq \boldsymbol{x}') \in \partial V \cap V \end{aligned}\right\} (2.2)$$

である。

相空間における確率分布汎関数を $P = P[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), t]$ とすれば一般化された Liouville 方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \iiint \frac{\delta}{\delta v_l(\boldsymbol{x})}\left(Q_l(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\, P[\boldsymbol{v}, t]\right) d^3\boldsymbol{x} = 0 \quad (2.3)$$

となる。Pの一種の Fourier 変換であたる特性汎関数：

$$\Phi[z(x),t]=\int e^{i(z\cdot v)}P[v,t]\,\delta v \tag{2.4}$$

をもちいれば L-方程式は Hopf 方程式に変換される：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=i\int z_l Q_l\left(\frac{\partial}{i\partial z_m}\right)\Phi\, d^3x \tag{2.5}$$

QED では電磁場 $(A_\mu)=(A_1, A_2, A_3, i\phi)$ にみたす Maxwell の方程式及び電子場 $(\psi_\mu)=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)$ に対する Dirac 方程式：

$$\Box A_\mu=-\frac{1}{c}j_\mu \tag{2.6}$$

$$\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{e}{c}A_\mu\right)\psi+\kappa\psi=0 \qquad \kappa=\frac{mc}{\hbar} \tag{2.7}$$

$$j_\mu=ic\bar\psi\gamma_\mu\psi \tag{2.8}$$

を基礎とする。こゝで $(x_\mu)=(x_1, x_2, x_3, ict)$, γ_μ は Dirac 行列で

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_l=-i\begin{pmatrix}0&\sigma_l\\-\sigma_l&0\end{pmatrix},\quad \gamma_4=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

とえらぶことができる。$\bar\psi=\psi^*\gamma_4$ (* は Hermite 共役) は ψ の Dirac 共役である。その他一般の慣用にしたがう。

相互作用のある輻射場と電子場に対する Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t}=H\Psi' \tag{2.10}$$

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}_1 \;, \quad \bar{H}_0 = \bar{H}_R + \bar{H}_M \tag{2·11}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{H}_R &= \frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_4}\right)^2 + (\mathrm{rot}\,A)^2\right\} d^3x \\ \bar{H}_M &= \frac{\hbar^2}{2m}\int \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi \; d^3x \\ \bar{H}_1 &= -\frac{1}{c}\int j \cdot A \; d^3x \end{aligned}\right\} \tag{2·12}$$

で表わされる。

ここでSHDとQEDとの関係を考えれば：力学系の運動方程式としては，(2·1)と(2·6),(2·7)とが対応し，統計法則を支配する方程式として，(2·3)又は(2·5)と(2·10)とが対応している。SHDでは速度場 $v_l(x)$ は平均流と乱れの和であり，明白な分離が常に可能であるわけではない。それに反し，QEDでは輻射場 A_μ と電子場 ψ_μ とは始めから完全に分離されている。

場の方程式(2·6),(2·7)から粒子的描像をうるためには ψ_μ，A_μ が各々反交換(フェルミオン)，交換関係(ボゾン)をみたす演算子とみなす，すなわち第2量子化を行う，必要がある。

$$\left.\begin{aligned} [\psi_\lambda(x), \psi^*_\mu(x')]_+ &= \delta_{\lambda\mu}\,\delta(x - x') \\ [\psi_\lambda(x), \psi_\mu(x')]_+ &= [\psi^*_\lambda(x), \psi^*_\mu(x')]_+ = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2·13}$$

$$\left.\begin{aligned} [A_\lambda(x), \tfrac{\partial}{\partial t}A_\mu(x')] &= i\hbar c^2\,\delta_{\lambda\mu}\,\delta(x - x') \\ [A_\lambda(x), A_\mu(x')] &= [\tfrac{\partial}{\partial t}A_\lambda(x), \tfrac{\partial}{\partial t}A_\mu(x')] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2·14}$$

$\psi_\lambda, \psi_\lambda^*$ および $A_\mu, \frac{1}{i\hbar c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_\mu$ は各々正準共役な関係にある。

輻射場と相互作用のないDirac方程式の解は平面波で表わされ4つの独立な固有解がある。それらを

$$u^{(r)}(\boldsymbol{p})\, e^{ip_\mu x_\mu/\hbar},\; v^{(r)}(\boldsymbol{p})\, e^{-ip_\mu x_\mu/\hbar} \qquad (r=1,2) \qquad (2.15)$$

とかく。こゝで

$$(p_\mu) = (\boldsymbol{p},\, iE_p/c), \quad E_p = \sqrt{c^2p^2+m^2c^4} \qquad (2.16)$$

である。これらは，uが電子を，vが陽電子を，$r=1,2$はスピンの上，下を表わすような固有関数になっている。これらによって電子場を展開し

$$\psi = \psi^- + \psi^+, \qquad \bar\psi = \bar\psi^- + \bar\psi^+ \qquad (2.17)$$

$$\left.\begin{aligned}\psi^-(x_\mu) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3\boldsymbol{p}\sum_{r=1,2} a^{(r)}(\boldsymbol{p})\, u^{(r)}(\boldsymbol{p})\, e^{ip_\mu x_\mu/\hbar}\\ \psi^+(x_\mu) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3\boldsymbol{p}\sum_{r=1,2} b^{(r)}(\boldsymbol{p})\, v^{(r)}(\boldsymbol{p})\, e^{-ip_\mu x_\mu/\hbar}\end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

とおくと，a, b は演算子として次の交換関係を満足する：

$$\left.\begin{aligned}&[a^{(r)}(\boldsymbol{p}),\, a^{(s)*}(\boldsymbol{p}')]_+ = \delta_{rs}\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\ &[b^{(r)}(\boldsymbol{p}),\, b^{(s)*}(\boldsymbol{p}')]_+ = \delta_{rs}\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \quad \text{etc.}\end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

同様に輻射場もやはり相互作用のない輻射場の固有解である平面波で展開する：

$$A_\mu = A^+ + A^- \qquad (2.20)$$

$$\left.\begin{aligned}A_\lambda^+(x_\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\boldsymbol{k}\,\frac{1}{\sqrt{2k}}\, a_\mu^*(\boldsymbol{k})\, e^{-ik_\mu x}\\ A_\lambda^-(x_\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\boldsymbol{k}\,\frac{1}{\sqrt{2k}}\, a_\mu(\boldsymbol{k})\, e^{ik_\mu x}\end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

$$(K_\mu) = (\boldsymbol{k}, ik) \quad k = |\boldsymbol{k}|$$

となる。a_μ, a_μ^* は演算子で

$$[a_\lambda(\boldsymbol{k}), a_\mu^*(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\lambda\mu}\,\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \quad \text{etc.} \tag{2.22}$$

を満足する。

$a^{(r)*}(\boldsymbol{p})$, $b^{(r)*}(\boldsymbol{p})$, $a_\mu^*(\boldsymbol{k})$ は電子，陽電子，光子に対する発生演算子 (C.O.) となり，$a^{(r)}(\boldsymbol{p})$, $b^{(r)}(\boldsymbol{p})$, $a_\mu(\boldsymbol{k})$ はそれらに対する消滅演算子 (A.O.) となる。そこで $|0\rangle$ を真空の状態ベクトルとすれば

$$a^{(r)}(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0, \quad b^{(r)}(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0, \quad a_\mu(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0 \tag{2.23}$$

となり，単位体積中に電子 $(\boldsymbol{p}_1, r_1)$, $(\boldsymbol{p}_2, r_2)$, … 陽電子 $(\boldsymbol{q}_1, s_1)$, $(\boldsymbol{q}_2, s_2)$, … ，光子 $(\boldsymbol{k}_1, \mu_1)$, $(\boldsymbol{k}_2, \mu_2)$, … がある状態は

$$a^{(r_1)*}(\boldsymbol{p}_1)\, a^{(r_2)*}(\boldsymbol{p}_2) \cdots b^{(s_1)*}(\boldsymbol{q}_1)\, b^{(s_2)*}(\boldsymbol{q}_2) \cdots$$
$$a_{\mu_1}^*(\boldsymbol{k}_1)\, a_{\mu_2}^*(\boldsymbol{k}_2) \cdots |0\rangle \tag{2.24}$$

で表わされる。

こゝで

$$a_0^*(\boldsymbol{k}) = -i a_4(\boldsymbol{k}), \quad a_0(\boldsymbol{k}) = -i a_4^*(\boldsymbol{k}) \tag{2.25}$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} n^-(\boldsymbol{p}, r) &= a^{(r)*}(\boldsymbol{p})\, a^{(r)}(\boldsymbol{p}) \\ n^+(\boldsymbol{p}, r) &= b^{(r)*}(\boldsymbol{p})\, b^{(r)}(\boldsymbol{p}) \\ n(\boldsymbol{k}) &= a_0(\boldsymbol{k})^*\, a_0(\boldsymbol{k}) \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

は電子，陽電子，光子に対する位数演算子とする。

ψ^-，$\bar{\psi}^-$，A_μ^- は電子，陽電子，光子の A.O. に関係する部分，$\bar{\psi}^+$，ψ^+，A_μ^+ はそれらの C.O. に関係する部分である。

§3. QED における数学的方法

以下，自然単位（$c = \hbar = 1$）をもちいる。(2.12) の相互作用の Hamiltonian 密度 $-\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\cdot A$ を演算子とみるときれば

$$
\begin{aligned}
H_1 &= S\,(ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu) \\
&= ie\,A_\mu(\bar{\psi}^+\gamma_\mu\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^+\gamma_\mu\psi^- - \psi^+\gamma_\mu\bar{\psi}^- \\
&\qquad + \bar{\psi}^-\gamma_\mu\psi^-)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

とみなおす必要がある。S は S 積をあらわし，$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 中の C.O.，A.O. を並べかえて，C.O. を A.O. の左におくようにし，その符号 ε を

$$
\varepsilon = \left\{
\begin{array}{ll}
\left.\begin{cases} + & \text{偶置換} \\ - & \text{奇置換} \end{cases}\right\} & \text{フェルミオン} \\
+ & \text{ボゾン}
\end{array}
\right.
\tag{3.2}
$$

とするものである。

相互作用する輻射場と電子場に対する Schrödinger 方程式 (2.10) は相互作用表示 $\Psi(t)$ で

$$\Psi'(t)=U'(t)\Psi(t)\qquad U'(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}\qquad (3.3)$$

にうつると

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\bar{H}(t)\Psi\qquad \bar{H}(t)=U'^{-1}H_1U'\qquad (3.4)$$

となる。この初期値問題に対する解を

$$\Psi(t)=U(t,t_0)\Psi(t_0)\qquad (3.5)$$

の形に書くと

$$U(t,t_0)=1+\sum_{l=1}^{\infty}(-i)^l\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{l-1}}dt_l$$
$$\bar{H}(t_1)\bar{H}(t_2)\cdots H(t_l)\qquad (3.6)$$

となる。ここでSマトリックスおよびRを

$$S=U(\infty,-\infty)\ ,\quad S=1+R\qquad (3.7)$$

で定義する。

Sマトリックスを不変形式で表わすと

$$S=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-i)^l}{l!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_l\,T(H(x_1)\cdots$$
$$\cdots H(x_l))\qquad (3.8)$$

となる。ここでTはT積を表わし、T積は $H(x_m)$ $(m=1,\dots,l)$ を未来から過去へ左から右へならべ、それが偶置換ならば+, 奇置換ならば−をとる。ここで contraction

$$\{A(x),B(y)\}=T(AB)-S(AB)\qquad (3.9)$$

を定義する。Wickの定理によれば、演算子 $b_1,\dots,b_l$ のT積は contraction とS積の和で表わせる：

$$T(b_1\cdots b_l)=\sum_m\sum_n\varepsilon(m_1,\dots,m_l)\{b_{m_1},b_{m_2}\}\{b_{m_3},b_{m_4}\}$$

$$\cdots \{b_{m_{2n-1}}, b_{m_{2n}}\} S(b_{m_{2n+1}} \cdots b_{m_l})\} \qquad (3.10)$$

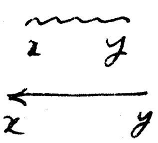
l個の電子 $(p_1, r_1) \cdots (p_l, r_l)$, m個の陽電子 $(q_1, s_1) \cdots (q_m, s_m)$, n個の光子 $(k_1, \mu_1) \cdots (k_n, \mu_n)$ の初期状態 Ψ_a から l'個の電子, m'個の陽電子, n'個の光子の終状態 Ψ_b への遷移マトリックス R_{ba}, 遷移確率 W_{ba} は

$$R_{ba} = \langle \Psi_b | R | \Psi_a \rangle, \quad W_{ba} = |R_{ba}| \qquad (3.11)$$

となる。すなわち S を $\langle \Psi_a | = \langle 0 | a^{(r_1')}(p_1') \cdots a^{(r_{l'}')}(p_{l'}')$ $b^{(s_1')}(q_1') \cdots b^{(s_{m'}')}(q_{m'}')\, a_{\mu_1'}(k_1') \cdots a_{\mu_{n'}'}(k_{n'}')$ と $| \Psi_a \rangle = a^{(r_1)*}(p_1) \cdots a^{(r_l)*}(p_l)\, b^{(s_1)}(q_1) \cdots b^{(s_m)}(q_m)$ $a_{\mu_1}(k_1) \cdots a_{\mu_n}(k_n) | 0 \rangle$ ではさんで行列成分を計算することになる。結局 S の展開 (3.8) の各項で $\langle \Psi_b |$ 中の A.O. に対応する C.O. と $| \Psi_a \rangle$ 中の C.O. に対応する A.O. だけがある項のみが遷移マトリックスにきいてくる。更にその各項を Wick の定理で展開し、contraction は

$\{A(x) A(y)\}$

$\{\psi(x) \bar{\psi}(y)\}$



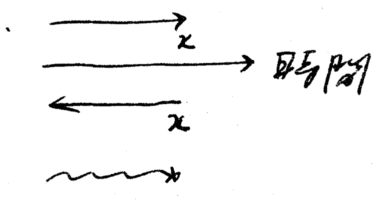
(3.12)

S 積中の $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A(x)$ については

$\psi(x)$

$\bar{\psi}(x)$

A



(3.13)

と書くと展開の各項は $\longrightarrow$, 〰 からなる　グラフとな

から Feynman グラフの和に帰着する。そして $\longrightarrow$, 〜〜 は各々超関数が対応し R_{ba} を計算することは Feynman グラフに対応する積分を実行することになる。

§4. Burgers乱流

前節で，Φに対する一般解や，S_{ba}（又はR_{ba}）に実際に寄与するのは$\langle \Phi_b|$中のA.O.に対応するC.O.と$|\Phi_a\rangle$中のC.O.に対応するA.O.だの項のみであることを述べた。これらに類似した数学的構造がHopf方程式の解析において現われることを示す。

ある種のBurgers乱流では $u=u(x,t)$ に対する Burgers 方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

またはその Fourier 変換 $v(k,t)$ に対する方程式：

$$\frac{\partial v}{\partial t}+i\int_{-\infty}^{\infty}k'v(k-k')v(k')dk'+\nu k^2 v=0 \tag{4.2}$$

の初期の乱流状態に対するその発展を論ずる。[3] (4.2)に対する Hopf 方程式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+A\Phi=0 \qquad \Phi=\Phi[z(k),t] \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned} A&=-\mathcal{D}_{21}k_2+\nu\mathcal{D}_1k_1\\ \mathcal{D}_1&=\int_{-\infty}^{\infty}dk_1\,z(k_1)D_1\\ \mathcal{D}_{21}&=\iint_{-\infty}^{\infty}dk_2\,dk_1\,z(k_2+k_1)D_2D_1 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

$$D_l = \frac{\delta}{\delta z(k_l)}$$

である。Φの初期値として

$$\left.\begin{aligned} \hat{\Phi}[z] &= \Phi[z, 0] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} K_{21} z_2 z_1\right) \\ K_{21} &= \iint_{-\infty}^{\infty} dk_2 dk_1 \hat{E}(k_2) \delta(k_2 + k_1) \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

とおく。ここで $\hat{E}(k)$ は初期のエネルギー・スペクトルである。

Hopf 方程式(4.3)を独立変数の変換によって，Aが波の間の相互作用の項のみをふくむ"相互作用表示"をつくり上げることができる：

$$\left.\begin{aligned} \zeta(k) &= z(k) e^{-\nu k^2 t} \\ s &= t \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} + A(s)\Phi = 0 \quad (4.7)$$

$$\left.\begin{aligned} A(s) &= -\mathcal{D}_{21} k_2 e^{2k_2 k_1 s} \\ \mathcal{D}_{21} &= \iint_{-\infty}^{\infty} dk_2 dk_1 \zeta(k_2 + k_1) D_2 D_1 \\ D_l &= \frac{\delta}{\delta \zeta(k_l)} \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

初期条件は

$$\left.\begin{aligned} \Phi[\zeta, 0] &= \hat{\Phi}[\zeta] = \exp\left(-\frac{1}{2} K_{21} \zeta_2 \zeta_1\right) \\ K_{21} &= \iint dk_2 dk_1 \hat{E}(k_2) \delta(k_2 + k_1) \end{aligned}\right\} \quad (4.9)$$

となる。

以下Φをもとめる。(4.7)の解を

$$\Phi[\xi,t]=U(t,0)\hat{\Phi} \tag{4.10}$$

と書くと U は

$$\frac{dU}{dt}+A(t)U=0 \tag{4.11}$$

を満足し、その解は

$$U(t,0)=1+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{l-1}}dt_l\ A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_l) \tag{4.12}$$

の形に書け、(3.4) と同形である。

ある時刻 t におけるエネルギー・スペクトル $E(k,t)$ は

$$E(k,t)\,\delta(k'+k)=\left[\frac{\delta^2\Phi}{\delta\xi(k')\delta\xi(k)}\right]_{\xi,\xi'=0}=\left[\frac{\delta^2}{\delta\xi'\delta\xi}U\hat{\Phi}\right]_{\xi,\xi'=0} \tag{4.13}$$

からもとめられる。そこで $U\hat{\Phi}$ の中で ξ について2次の項だけをひろい出せばよい。なぜならば、2次より低次の項は微分したとき落ち、高次の項は $\xi',\xi=0$ としたとき落ちるからである。これは前節で $\delta_{kk'}$ に生きのこる項をさがしたのと同じ考え方である。それ故、ξ を C.O, $\frac{\delta}{\delta\xi}$ を A.O. に対応させれば、これらの関係がえられる。

§5. むすび

以上、QED と SHD の相似点、相違点について論じた。前節で数学的相似点を指摘したが、物理的には重大な相違点

がある。QEDではくりこみを行えば，近似の　数値をとればば十分であろうが，SHDでは非常に高次までとらなければ十分でない。あるいはこのような展開が収束するかどうかも確かでない。これは乱流での非線形相互作用が非常に強いためである。そこで，くりこみのような考えをつかって処理することが必要になると思われる。

参考文献：

1) Feynman; R.P.: Quantum Electrodynamics (1962, Benjamin)

2) ハイトラー，W.（沢田克郎訳）：輻射の量子論 上，下（1957, 1958, 吉岡書店）

3) 桑原真二：数理研講究録 No.120 (1971) p 124

4) 桑原真二：統計流体力学（1976，協力懇話会）

5) 朝永，福田，福田，沢田：場の量子論（1955，岩波講座現代物理学）